

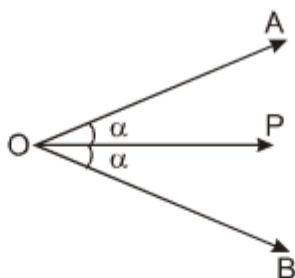
CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

DEFINICIÓN:

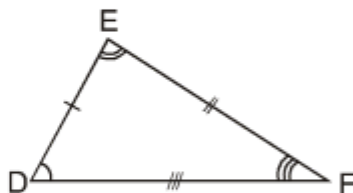
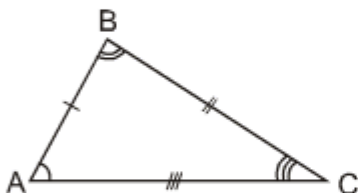
Dos ángulos son congruentes si sus medidas son iguales. Es decir, interior del ángulo trazado desde el vértice y que forma con los lados ángulos congruentes.

$\overrightarrow{OP}$: bisectriz

$$\Rightarrow m\hat{AOP} = m\hat{POB}$$



Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes, de tal modo que a lados congruentes le correspondan ángulos congruentes y viceversa.



En la figura, los triángulos ABC y DEF son congruentes, lo cual se denota como:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

y se lee triángulo ABC congruente con el triángulo DEF.

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} & \angle A \cong \angle D \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} & \angle B \cong \angle E \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} & \angle C \cong \angle F \end{cases}$$

POSTULADO Y TEOREMAS DE LA CONGRUENCIA

Para determinar la congruencia de dos triángulos solo es necesario establecer la congruencia de tres elementos, los cuales deben estar en un orden determinado y por lo menos uno de ellos tiene que ser un lado. Se presenta el siguiente postulado.

POSTULADO (CONGRUENCIA LAL):

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \text{Si: } \angle A \cong \angle D \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BAC \cong \triangle EDF$$

TEOREMA

En todo triángulo, a lados congruentes le corresponden ángulos congruentes y viceversa.

TEOREMA (CONGRUENCIA ALA)

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes un lado y los ángulos adyacentes a este lado, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \angle A \cong \angle D \\ \text{Si: } \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \angle C \cong \angle F \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACB \cong \triangle DFE$$

TEOREMA (CONGRUENCIA LLL)

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes sus tres lados, entonces los triángulos son congruentes.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \text{Si: } \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

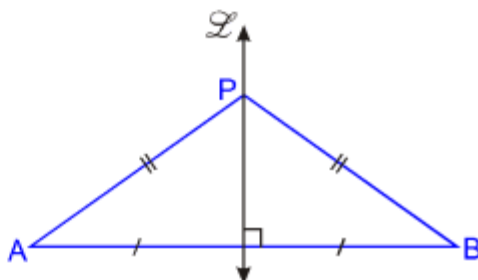
Teorema de la Mediatriz

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

En la figura

l : mediatriz de $\overline{AB}$.

Si $P \in l$, entonces $\boxed{AP = PB}$

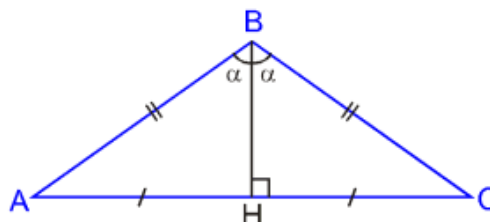


Corolario 1

En todo triángulo isósceles, la altura relativa a la base es también mediana y bisectriz interior relativa a la base.

En el $\triangle ABC$ isósceles:

Si $\overline{BH}$ es altura relativa a la base $\overline{AC}$
entonces $\overline{BH}$ es mediana y bisectriz interior



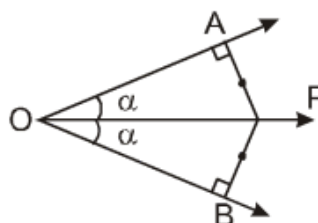
Teorema de la bisectriz

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo.

En la figura

$\overrightarrow{OP}$: Bisectriz del $\widehat{AOB}$.

Si $P \in \overrightarrow{OP}$ entonces $\boxed{AP = PB}$ y $\boxed{OA = OB}$



Base media de un triángulo

Es el segmento que tiene por extremos los puntos medios de dos lados de un triángulo.

Teorema de la base media

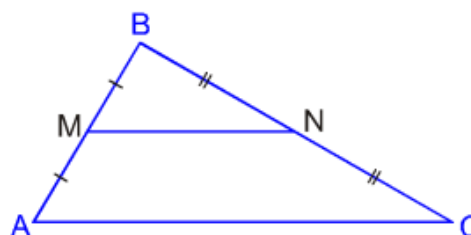
En todo triángulo, una base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.

En la figura

$\overline{MN}$: Base media

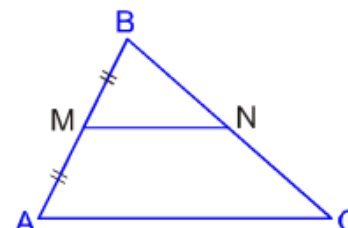
Entonces

$$\boxed{\overline{MN} \parallel \overline{AC}} \text{ y } \boxed{MN = \frac{AC}{2}}$$



Corolario 2

En el $\triangle ABC$, si $AM = MB$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$
entonces $\overline{MN}$ es base media del $\triangle ABC$.

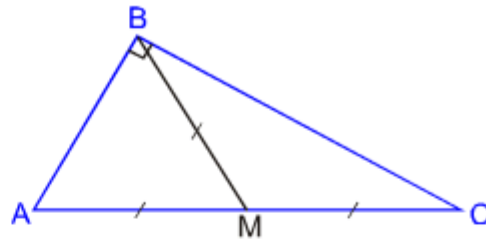


Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

En todo triángulo rectángulo, la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.

En la figura

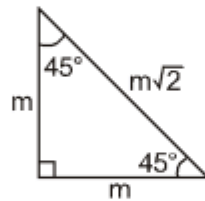
$\overline{BM}$: Mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$



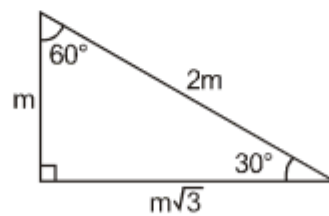
entonces $BM = \frac{AC}{2}$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

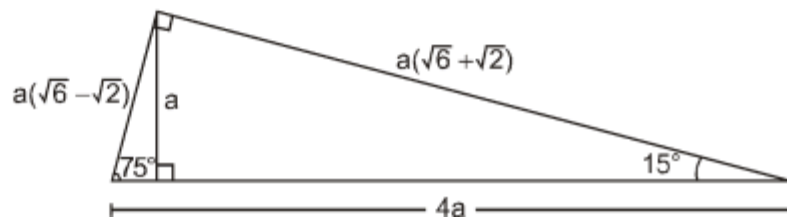
NOTABLE DE 45°



NOTABLE DE 30° y 60°

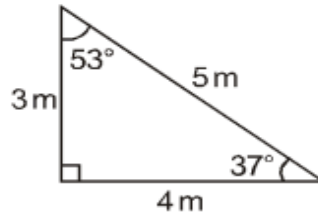


NOTABLE DE 15° y 75°

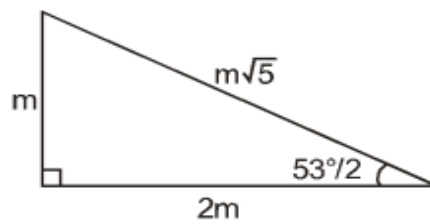


TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS

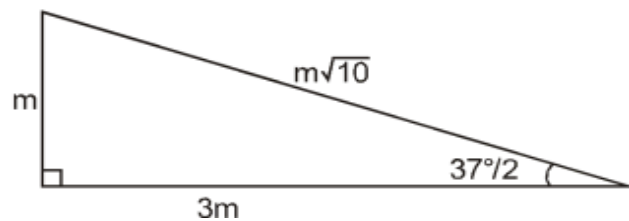
NOTABLE DE 37° y 53°



NOTABLE DE $53^\circ/2 = 26^\circ 30'$



NOTABLE DE $37^\circ/2 = 18^\circ 30'$

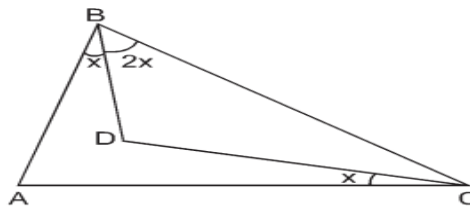


PROBLEMAS

1)

En la figura, $AC = BC$ y $AB = CD$. Halle x .

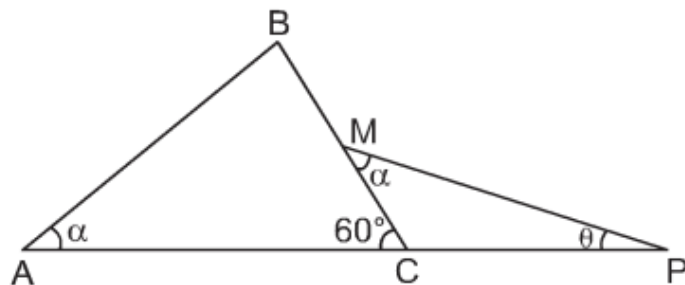
- A) 30°
- B) $37^\circ 30'$
- C) $22^\circ 30'$
- D) $26^\circ 30'$
- E) 45°



2)

En la figura, $AB = MP$ y $MB = MC$. Halle $\frac{AC}{PC}$.

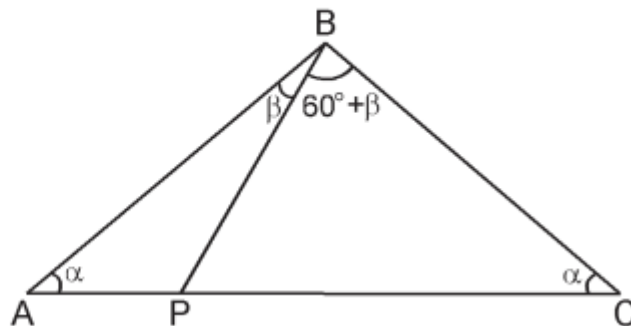
- A) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{4}$
 B) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{4}{3}$
 C) $\frac{7}{3}$



3)

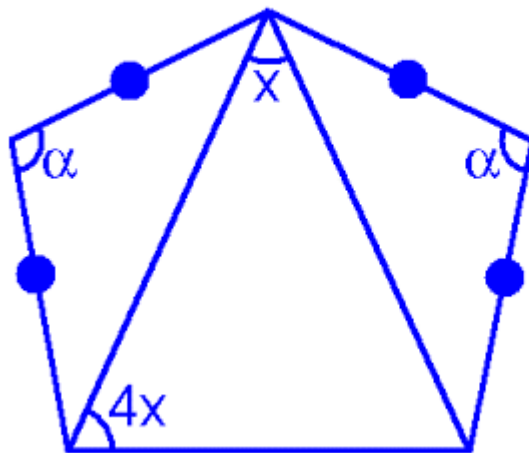
En la figura, $AP = 3$ m, $PC = 8$ m. Halle BP .

- A) 6 m
 B) 4,5 m
 C) 5,5 m
 D) 5 m
 E) 7 m



4)

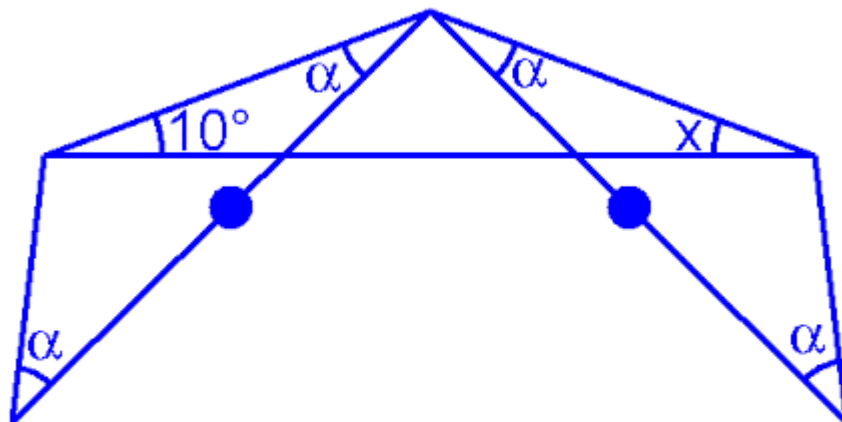
En la figura, calcule "x".



- a) 15°
- b) 18°
- c) 10°
- d) 20°
- e) 12°

5)

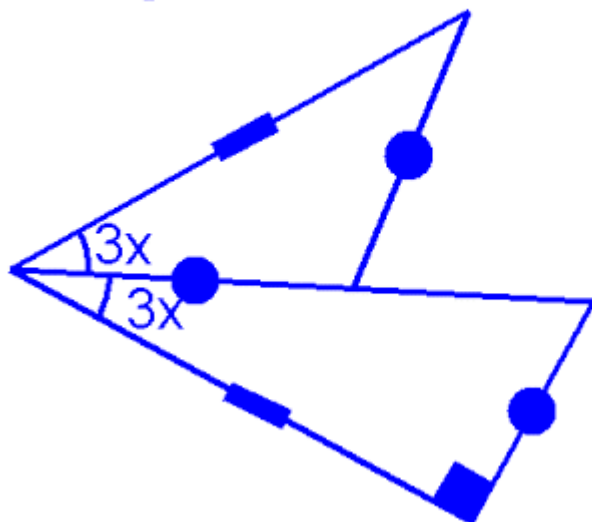
En la figura, calcule "x".



- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| a) 9° | b) 18° | c) 12° |
| d) 15° | e) 10° | |

6)

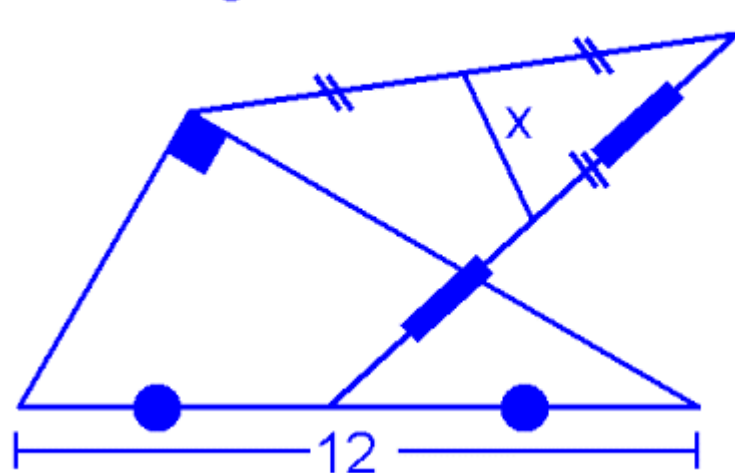
En la figura, calcule "x".



- a) 8
- b) 15
- c) 12
- d) 10
- e) 9

7)

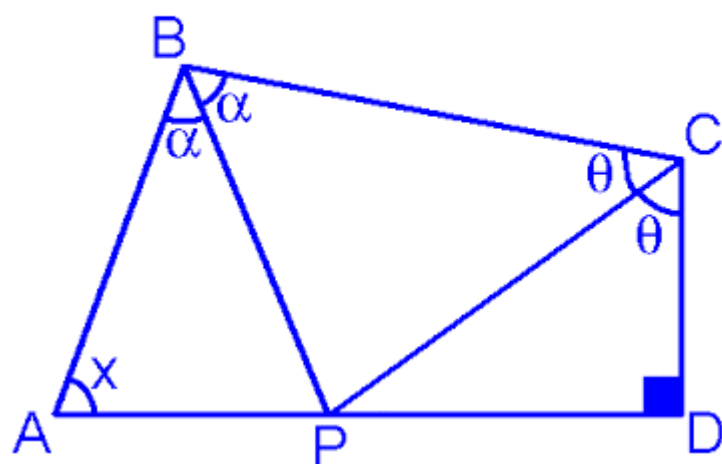
En la figura, calcule "x".



- a) 5
- b) 4
- c) 1
- d) 2
- e) 3

8)

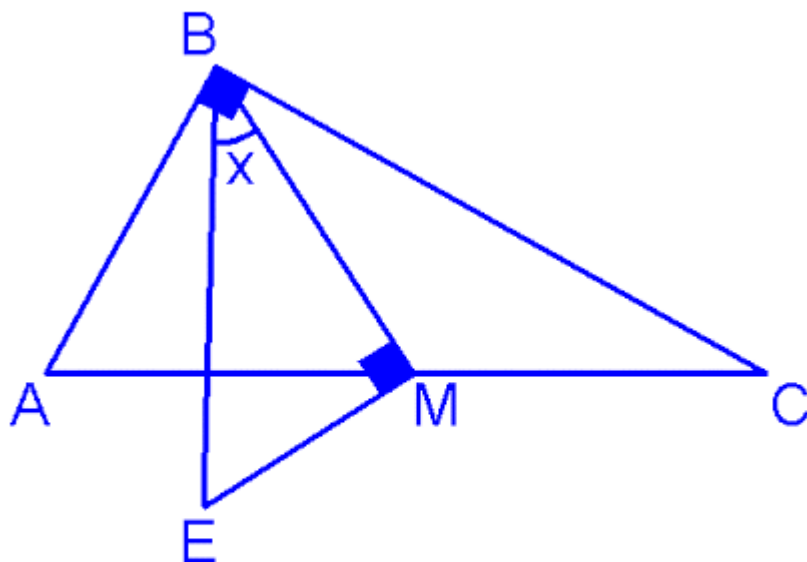
En la figura calcule "x", si: $AP=2PD$



- a) 10°
- b) 20°
- c) 30°
- d) 50°
- e) 60°

9)

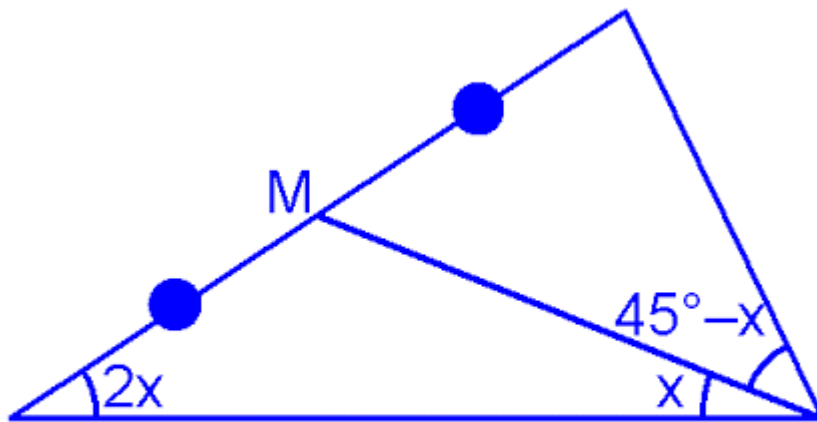
Si: $AM=MC$ y $AC=BE$. Calcule "x".



- a) 45°
- b) 37°
- c) 53°
- d) 30°
- e) 60°

10)

En la figura, calcule "x".



a) 9°

b) 18°

c) 12°

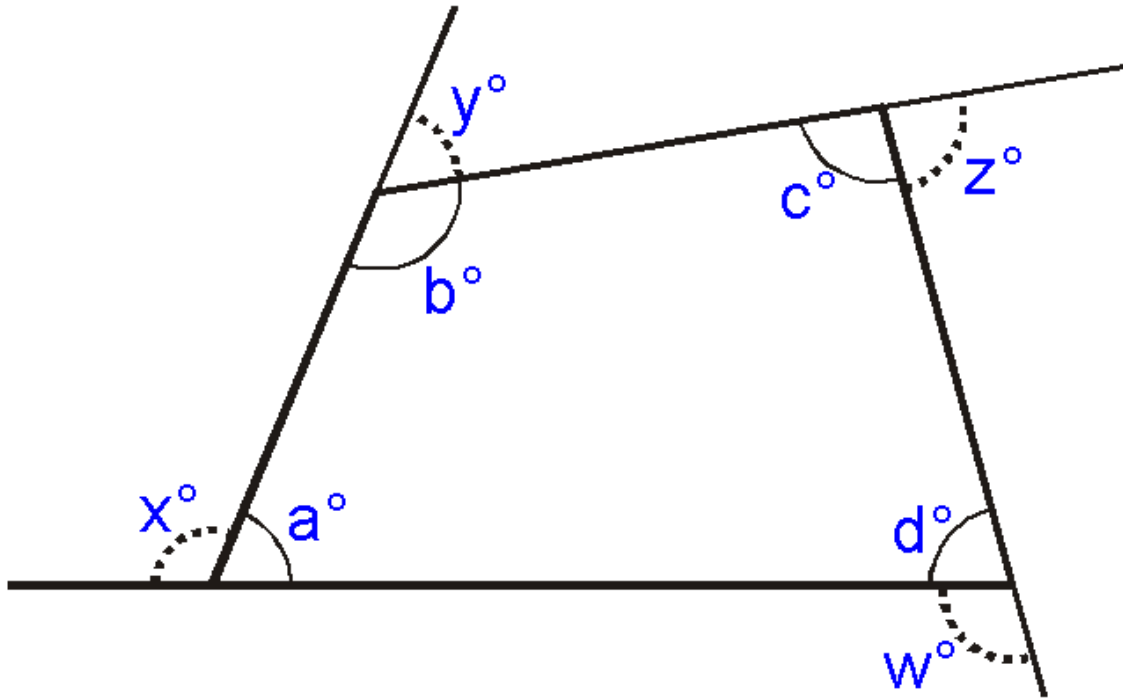
d) 30°

e) 15°

CUADRILATEROS

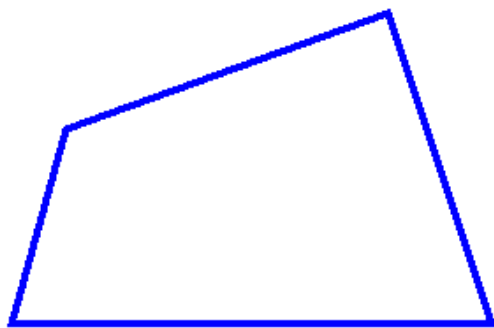
Definición

Es un polígono de 4 lados.

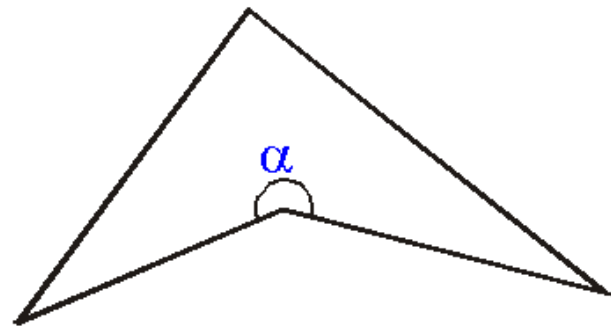


$$x + y + z + w = a + b + c + d = 360^\circ$$

Clasificación general



Convexos



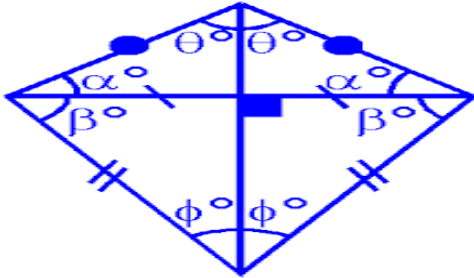
No convexos

Clasificación de los cuadriláteros convexos

1. Trapezoide

Aquéllos que no tienen lados opuestos paralelos.

SIMÉTRICO

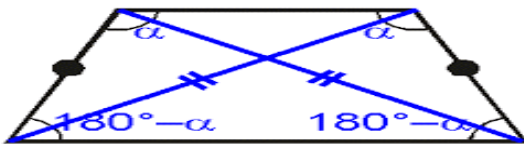


ASIMÉTRICO

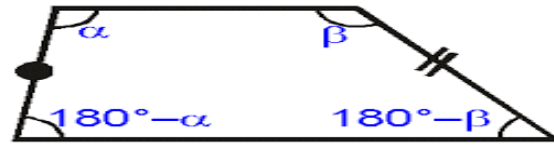


2. Trapecios

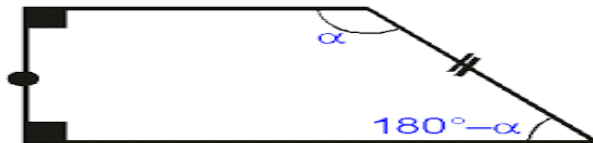
Tienen dos lados opuestos paralelos llamados bases, y los otros lados llamados lados no paralelos.



Trapecio isósceles



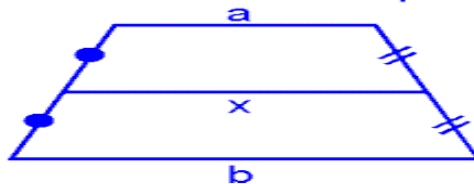
Trapecio escaleno



Trapecio rectángulo

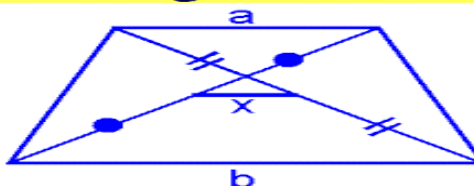
PROPIEDADES DEL TRAPECIO

- Mediana de un trapecio



$$x = \frac{a+b}{2}$$

- Segmento que une los puntos medios de las diagonales.

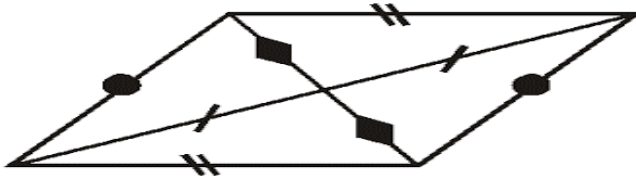


$$x = \frac{b-a}{2}$$

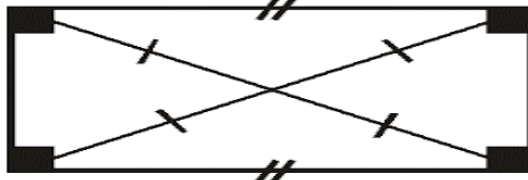
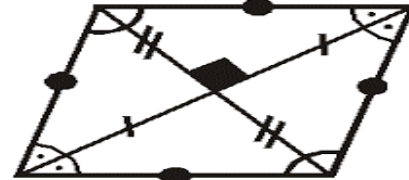
3. Paralelogramos

Aquéllos de lados opuestos paralelos y congruentes ángulos opuestos de igual medida y dos ángulos consecutivos siempre suplementarios. Sus diagonales se bisecan.

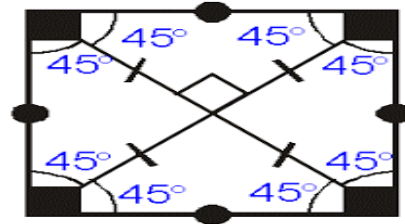
Romboide



Rombo



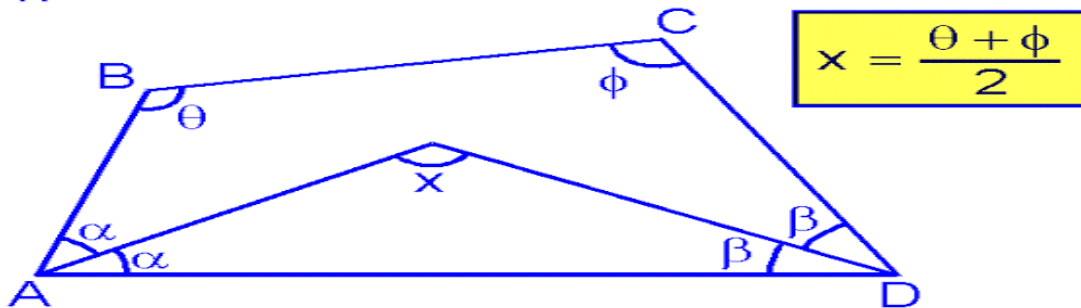
Rectángulo



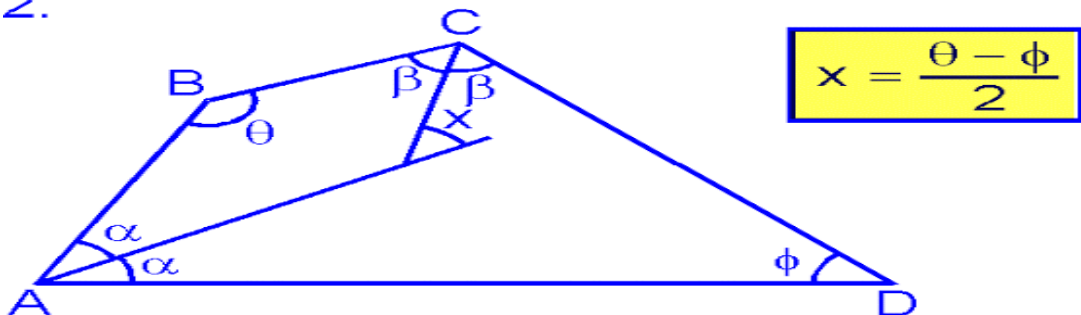
Cuadrado

Propiedades generales

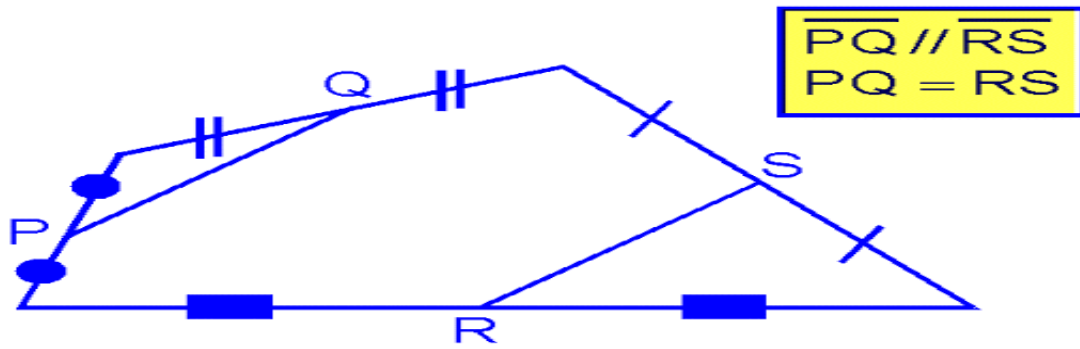
1.



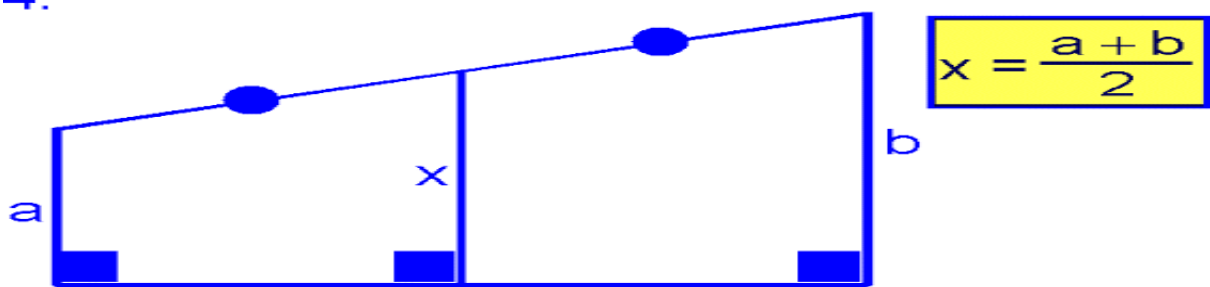
2.



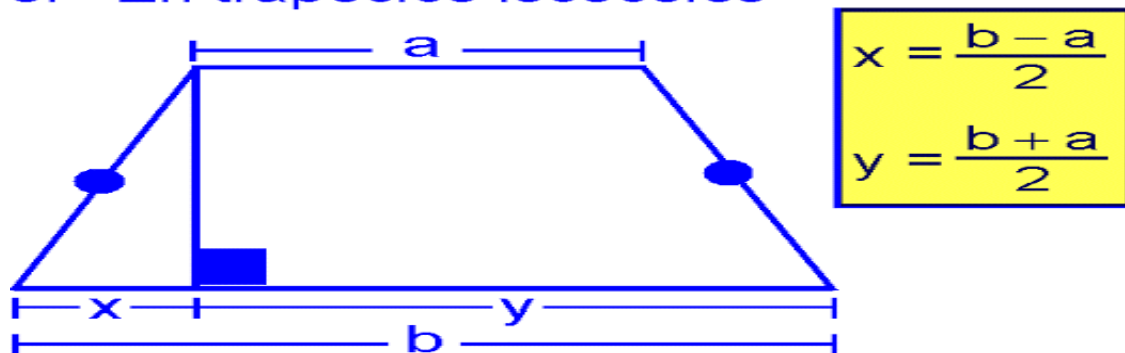
3.



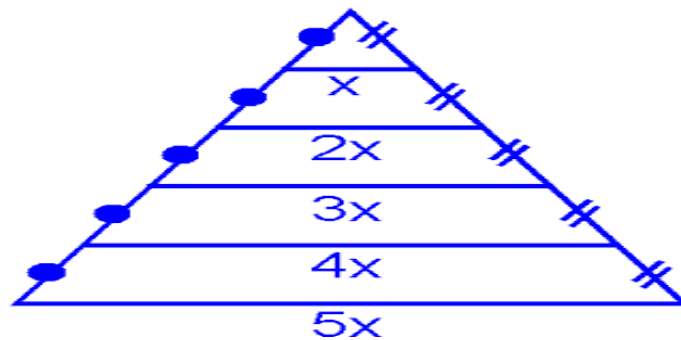
4.



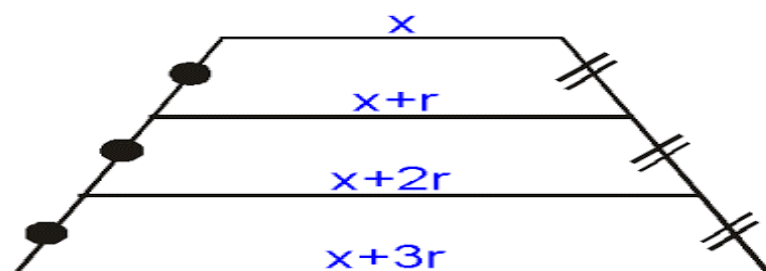
5. En trapezios isósceles



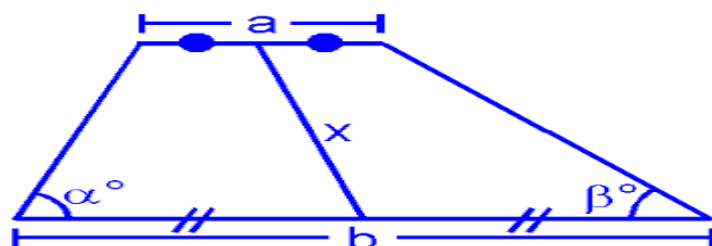
6. En triángulos



7. En trapecios



8. Segmento que une los puntos medios de las bases de un trapecio.

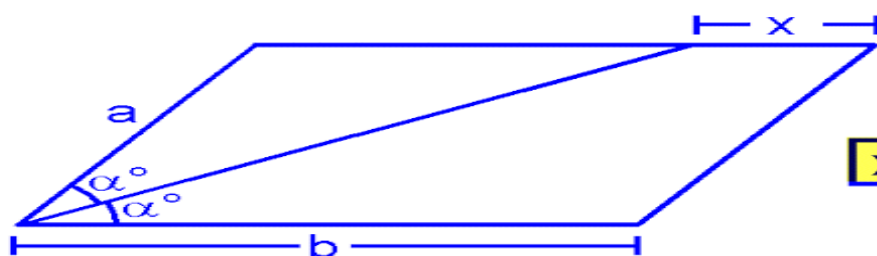


Si: $\alpha + \beta = 90^\circ$

;

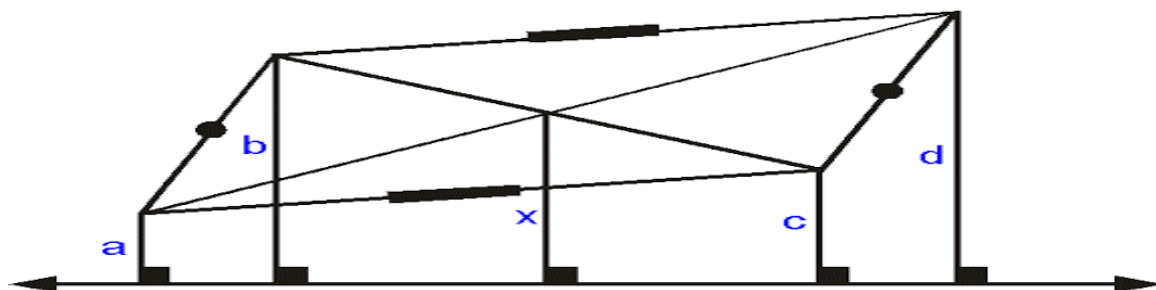
$$x = \frac{b-a}{2}$$

9. En paralelogramos.



$$x = b - a$$

10. En paralelogramos.



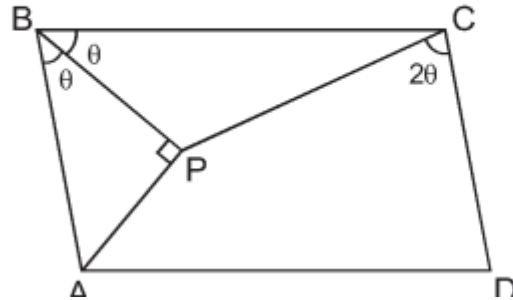
$$x = \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

PROBLEMAS

1)

En la figura, el romboide ABCD representa una parcela dividida en tres regiones, $BC = 10$ m, $AB = 6$ m. Si el costo de construir una pared representada por $\overline{CD}$ es S/. 1200, halle el costo que significaría construir una pared representada por $\overline{PC}$.

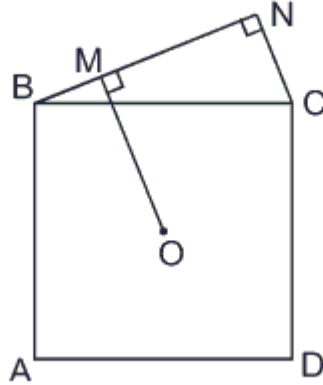
- A) S/. 1600
- B) S/. 1400
- C) S/. 1050
- D) S/. 1200
- E) S/. 1350



2)

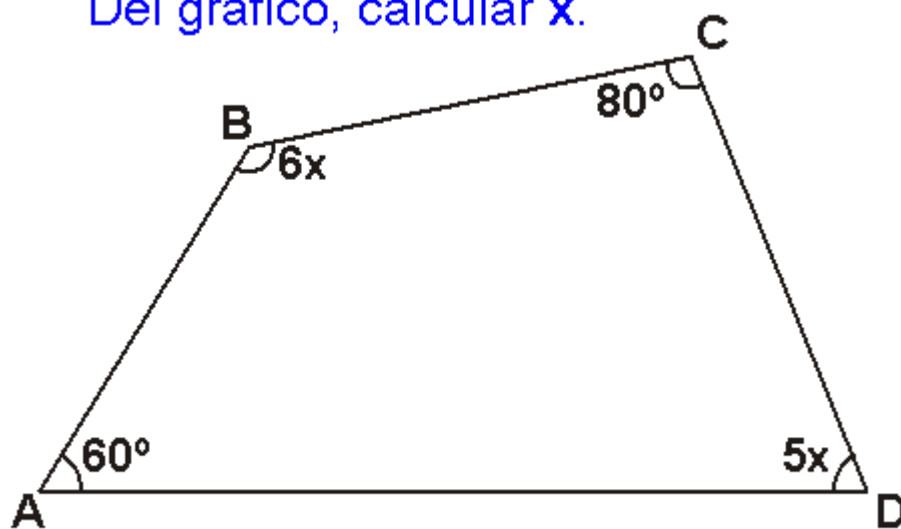
En la figura, O es centro del cuadrado ABCD. Si $CN = 3$ m y $BN = 8$ m, halle OM.

- A) 5 m
- B) 4 m
- C) 5,5 m
- D) 4,5 m
- E) 6 m



3)

Del gráfico, calcular x .

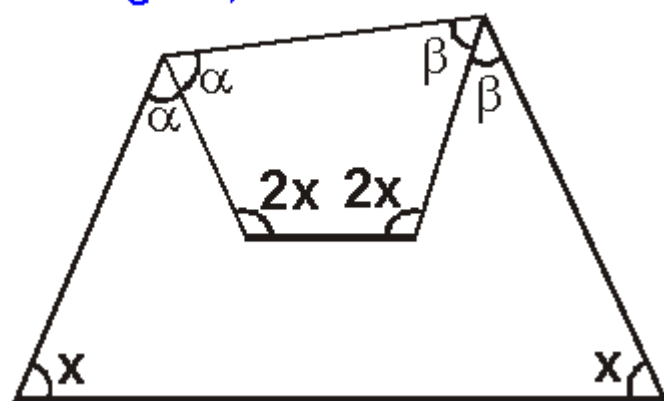


- A) 40° B) 30° C) 20° D) 10° E) 50°

4)

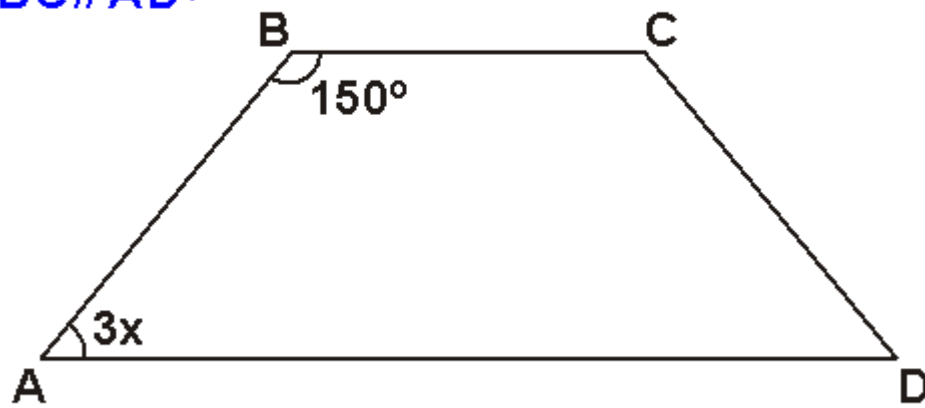
En la figura, calcule " x ".

- A) 75°
 B) 60°
 C) 50°
 D) 80°
 E) 70°



5)

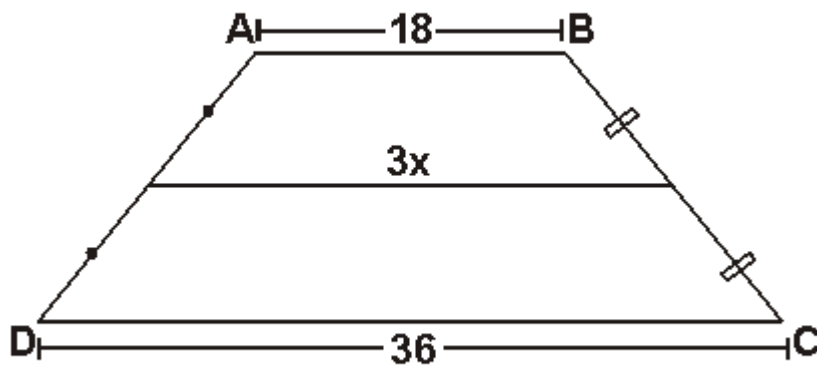
En el trapezio $ABCD$, calcular x , si:
 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



A) 10° B) 12° C) 15° D) 18° E) 16°

6)

Calcular x , si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



A) 8 B) 6 C) 10 D) 12 E) 15

7)

Calcular "x"

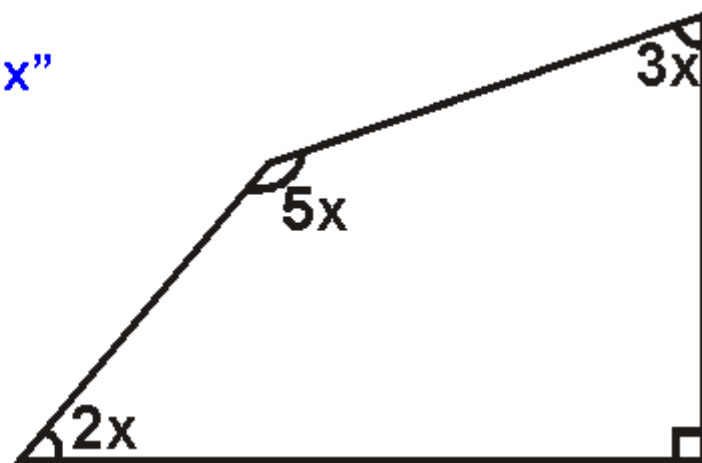
A) 12°

B) 13°

C) 17°

D) 14°

E) 27°



8)

Las longitudes de las bases y de la base media de un trapecio suman 60. Calcular la longitud de la base media.

A) 40 B) 45 C) 15 D) 30 E) 20

9)

En la figura: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, calcular " α " y " β "

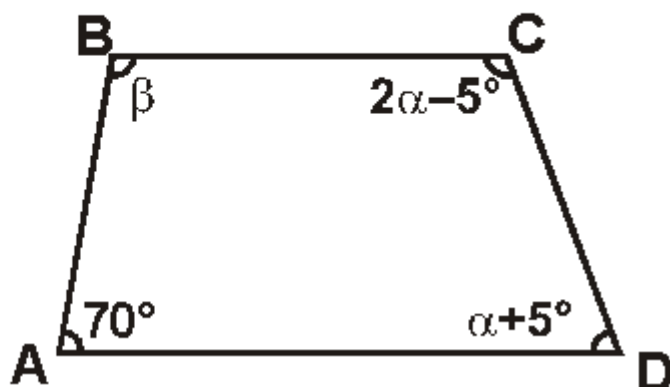
A) 124° y 12°

B) 36° y 20°

C) 120° y 70°

D) 110° y 60°

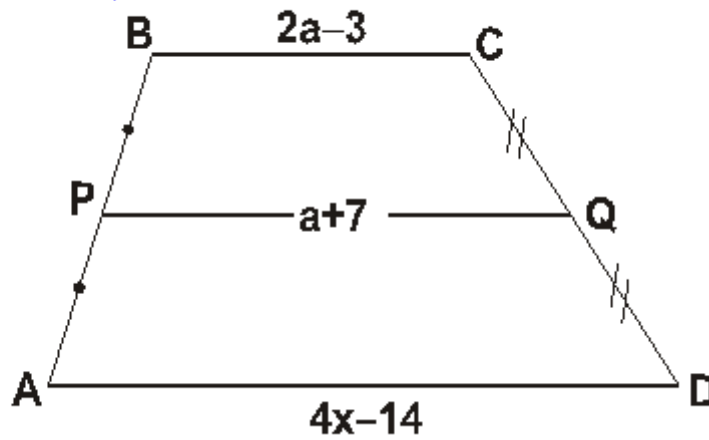
E) 120° y 50°



10)

En el trapecio, calcular "x".

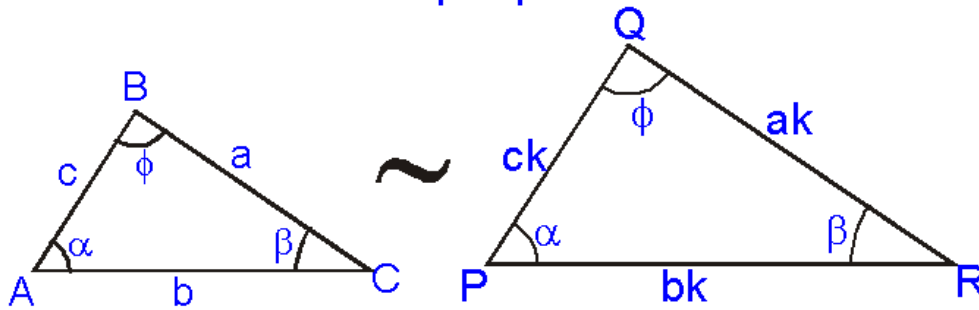
- A) 8
- B) $15/2$
- C) $31/4$
- D) 6
- E) 10



SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Definición

Dos triángulos son semejantes, si tienen sus tres ángulos internos congruentes y las longitudes de sus lados homólogos son directamente proporcionales.

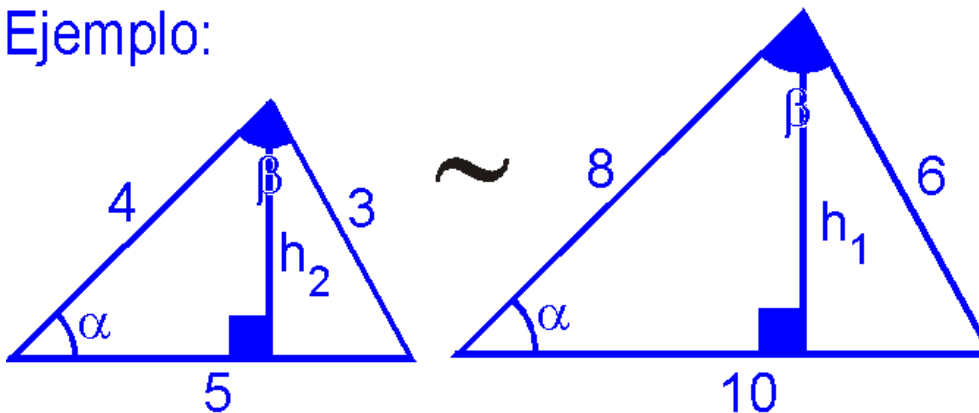


$$\Rightarrow \text{EI } \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Razón de semejanza (r)

Es aquel número real y positivo que se obtiene al dividir dos longitudes homólogas de dos triángulos semejantes.

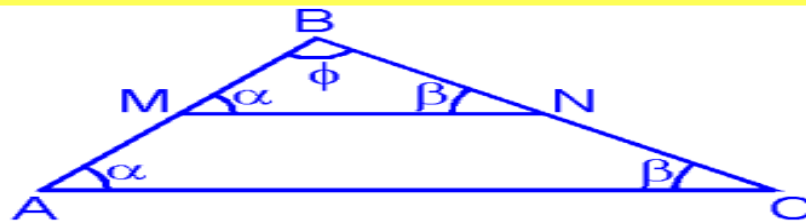
Ejemplo:



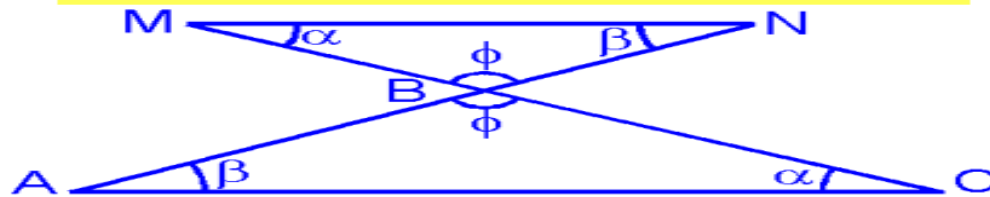
$$\text{Razón} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \dots = \frac{h_1}{h_2} = 2$$

Algunas figuras donde se presentan triángulos semejantes

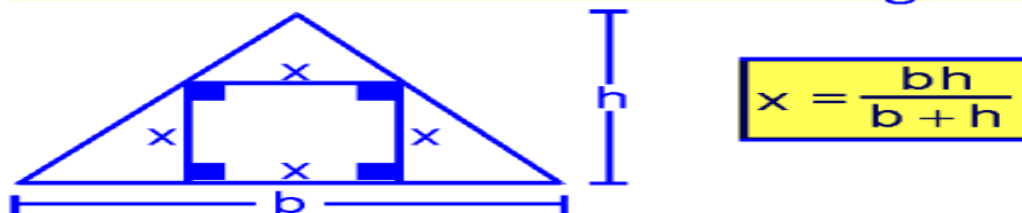
1. Si $\overline{MN} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \text{el } \triangle ABC \sim \triangle MBN$



2. Si $\overline{MN} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \text{el } \triangle ABC \sim \triangle MBN$



3. Cuadrado inscrito en un triángulo

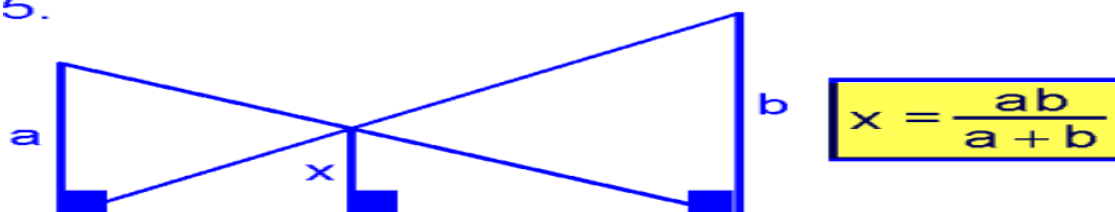


4. Cuadrado inscrito en un rombo.

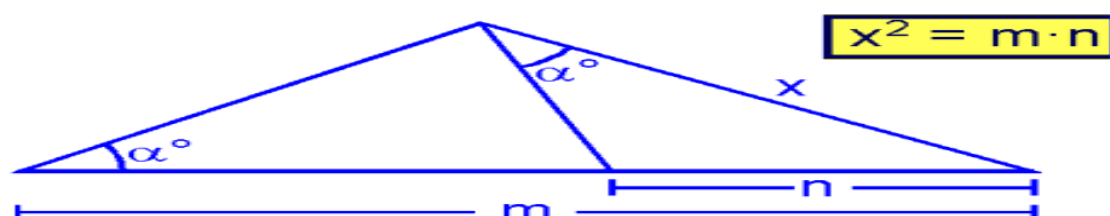


d y D son diagonales

- 5.



- 6.

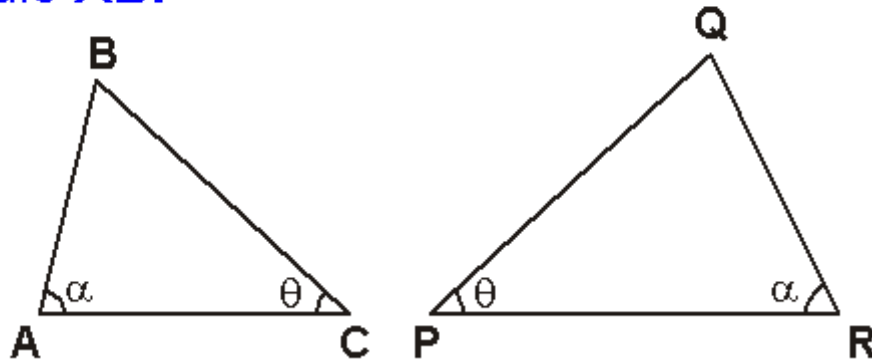


PROBLEMAS

1)

En el gráfico $PQ=15$, $QR=9$, $BC=5$.
Calcule AB .

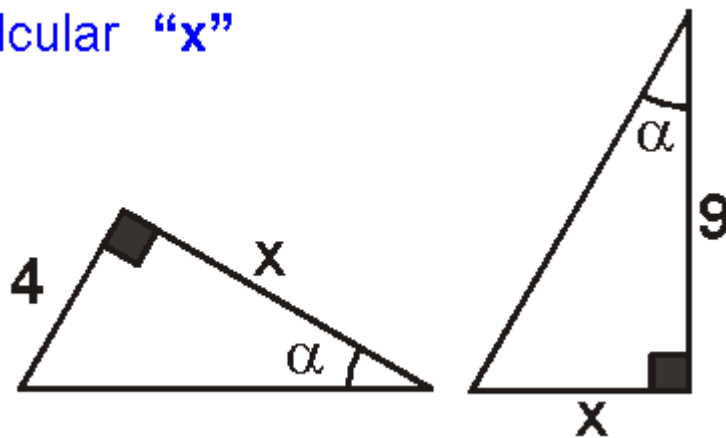
- A) 3
- B) 6
- C) 5
- D) 4
- E) 8



2)

Calcular "x"

- A) 3
- B) 6
- C) 5
- D) 4
- E) 8

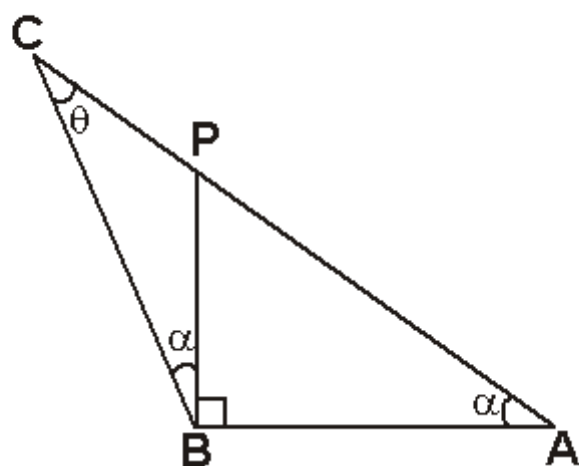


3)

En la figura, si $AP=5$ y $PC=4$, calcular

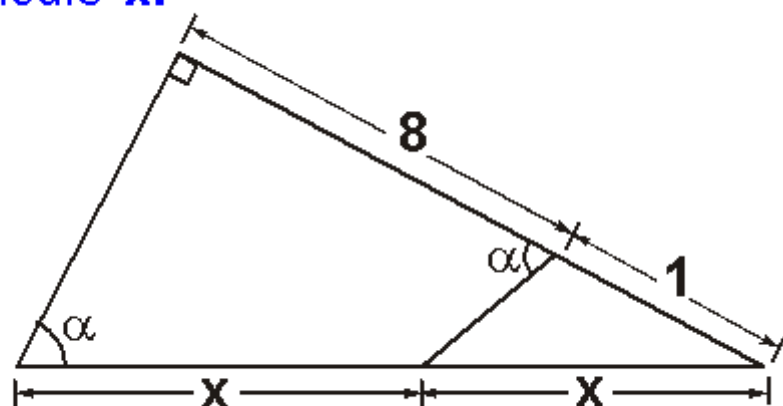
BC.

- A) 3
- B) 6
- C) 5
- D) 4
- E) 8



4)

Calcule x .

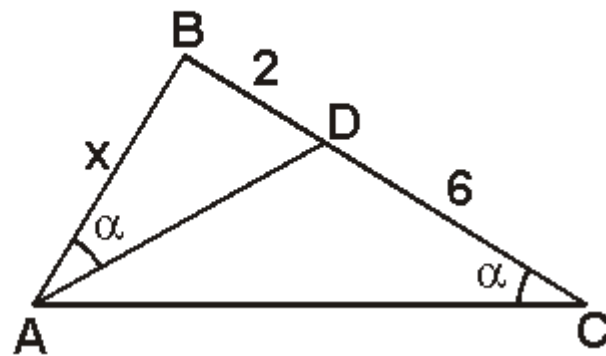


- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 5
- E) 9

5)

Calcular "x"

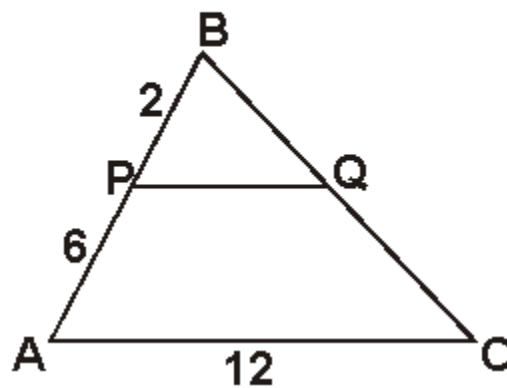
- A) 3
- B) 6
- C) 5
- D) 4
- E) 8



6)

Hallar "PQ", si: $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

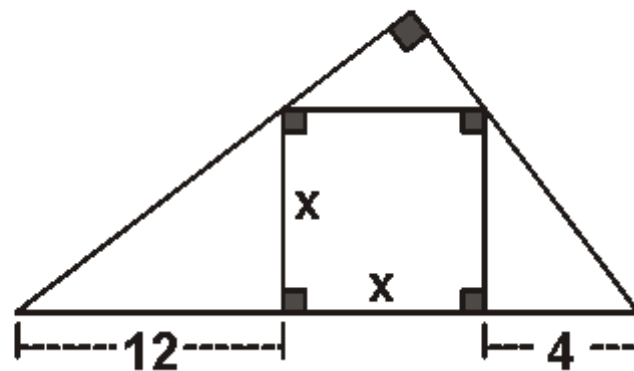
- A) 3
- B) 6
- C) 5
- D) 4
- E) 8



7)

Calcular "x"

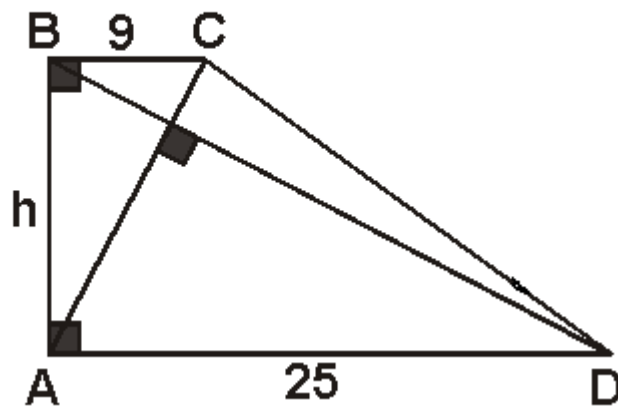
- A) 8
- B) $4\sqrt{3}$
- C) $6\sqrt{3}$
- D) 10
- E) $4\sqrt{2}$



8)

Hallar la altura del trapecio.

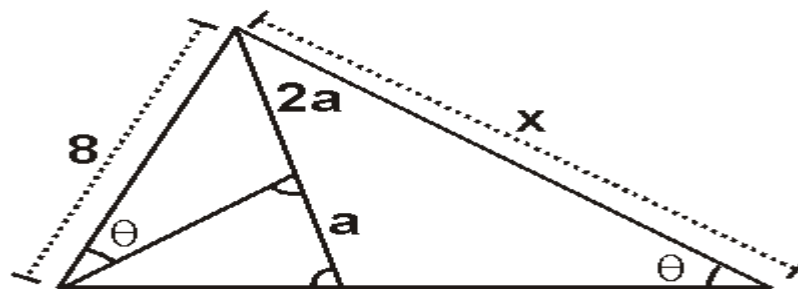
- A) 13
- B) 16
- C) 15
- D) 14
- E) 18



9)

Del gráfico, calcular " x ".

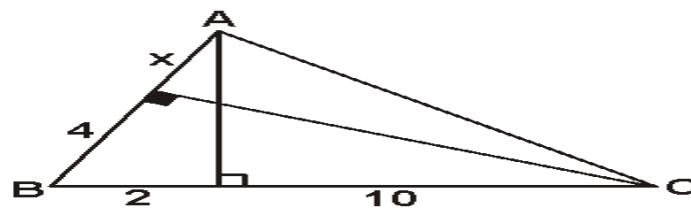
- A) 13
- B) 12
- C) 15
- D) 14
- E) 18



10)

En el triángulo ABC mostrado, hallar " x ".

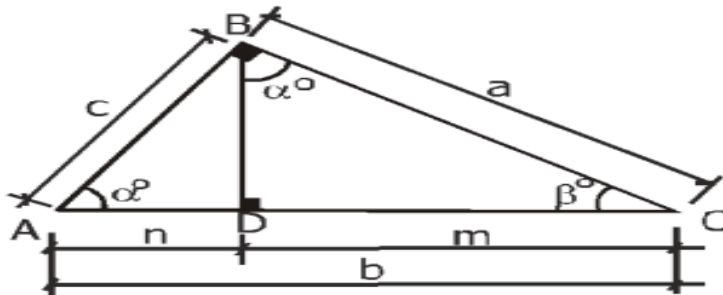
- A) 3
- B) 6
- C) 2
- D) 4
- E) 5



RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO

Teorema del cálculo del cateto

El cuadrado de la longitud de cada cateto es media proporcional entre su proyección sobre la hipotenusa y la longitud dicha la hipotenusa.



De la figura: $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{a}$$

Efectuando:

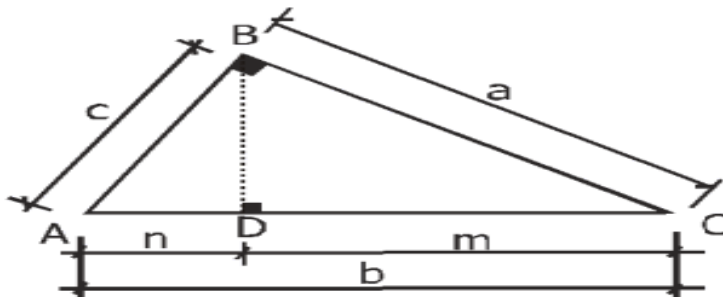
$$a^2 = b \cdot m$$

Análogamente:

$$c^2 = b \cdot n$$

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



Del teorema anterior:

- $a^2 = (b \cdot m)$
- $c^2 = (b \cdot n)$

Se cumple que:

$$b^2 = a^2 + c^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$b.h = a.c \dots\dots\dots (2)$$

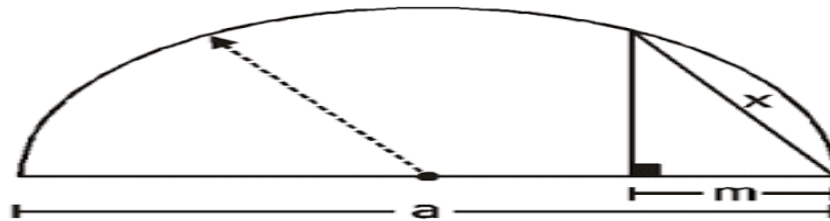
(1) y (2)²

$$\frac{b^2}{b^2 h^2} = \frac{a^2}{a^2 c^2} + \frac{c^2}{a^2 c^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}$$

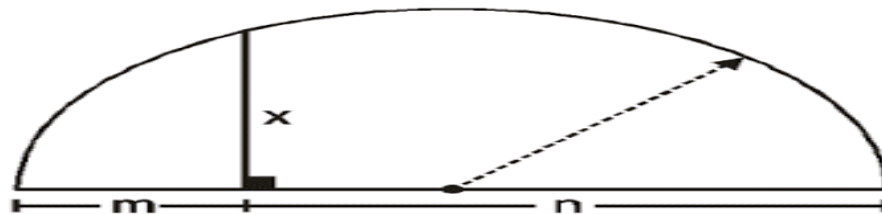
PROPIEDADES

1.



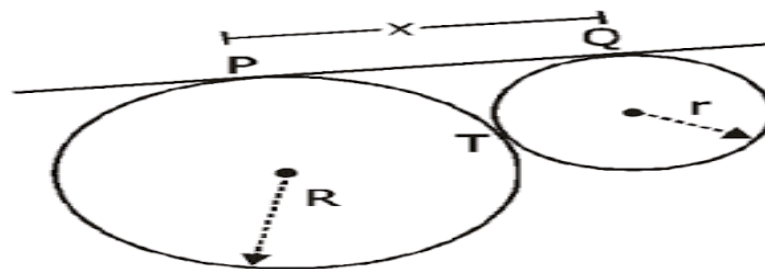
$$\Rightarrow \boxed{x^2 = am}$$

2.



$$\Rightarrow \boxed{x^2 = m.n}$$

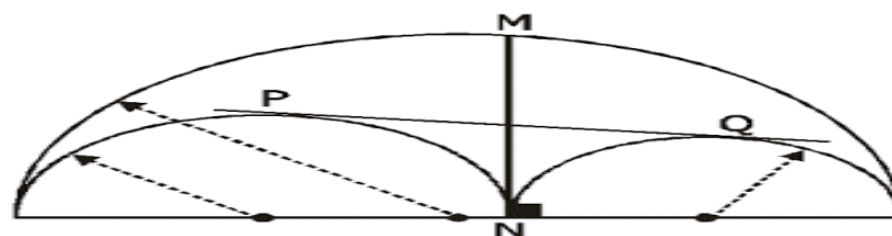
3.



Si: P , Q y T son puntos de tangencia.

$$\Rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{R.r}}$$

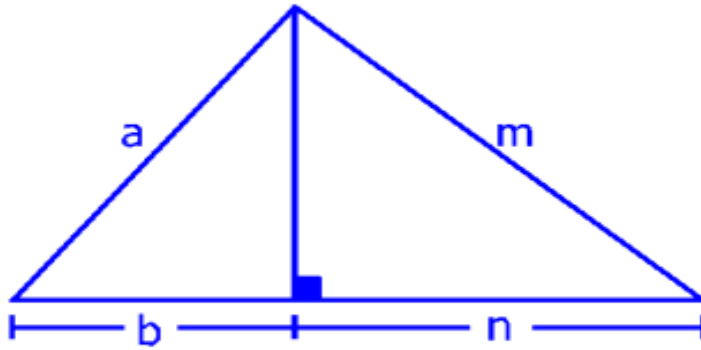
4.



Si: P y Q son puntos de tangencia.

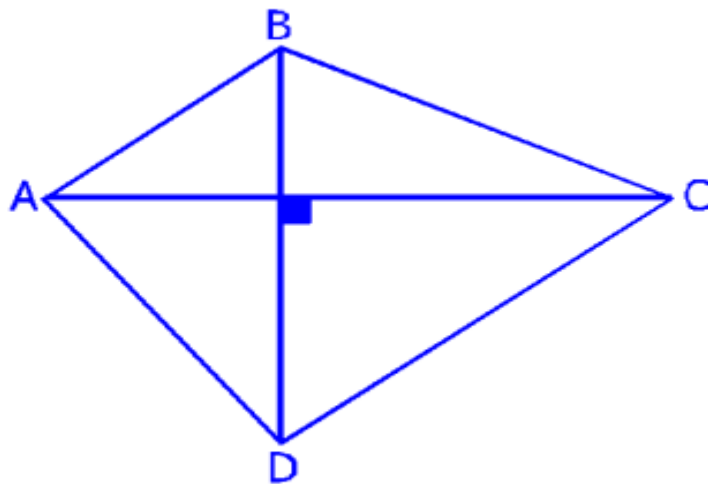
$$\Rightarrow PQ = MN$$

5.

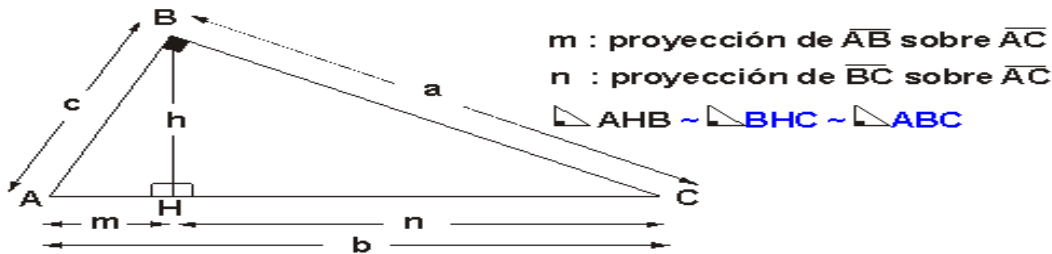
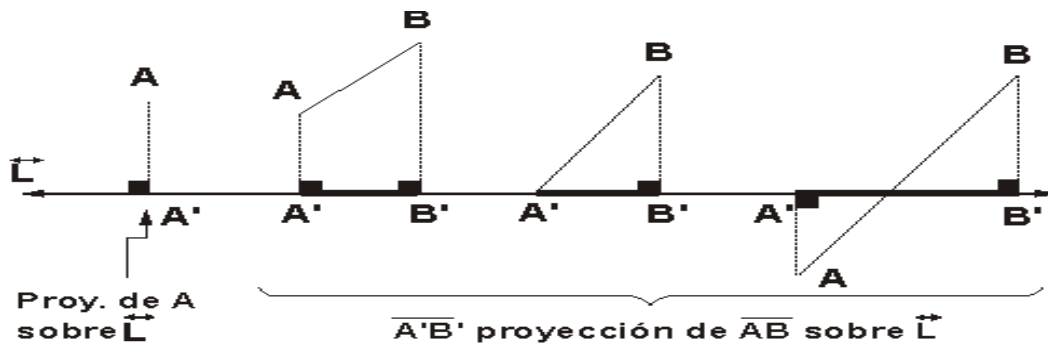


$$\Rightarrow a^2 - b^2 = m^2 - n^2$$

6. Para todo cuadrilátero de diagonales perpendiculares.



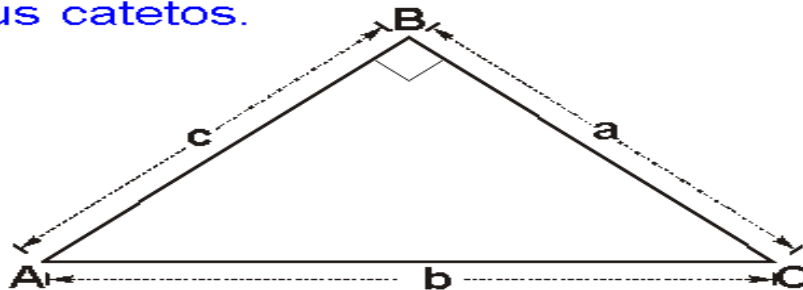
$$\Rightarrow (AB)^2 + (CD)^2 = (BC)^2 + (AD)^2$$



RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

I) TEOREMA DE PITÁGORAS:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.



Donde: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son los catetos

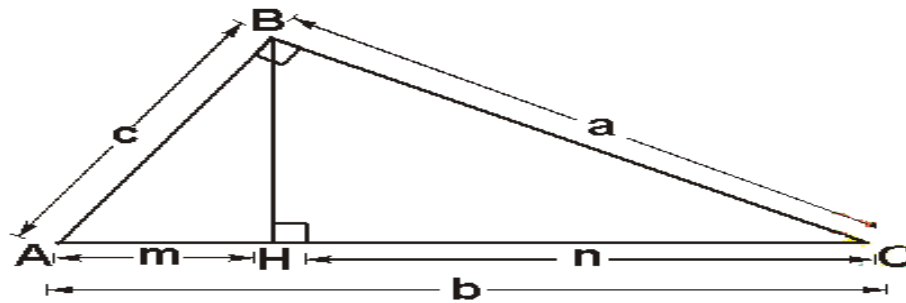
$\overline{AC}$: hipotenusa

Del gráfico: $AB = c$; $BC = a$ y $AC = b$

Se cumple: $b^2 = a^2 + c^2$

II) TEOREMA DEL CATETO :

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

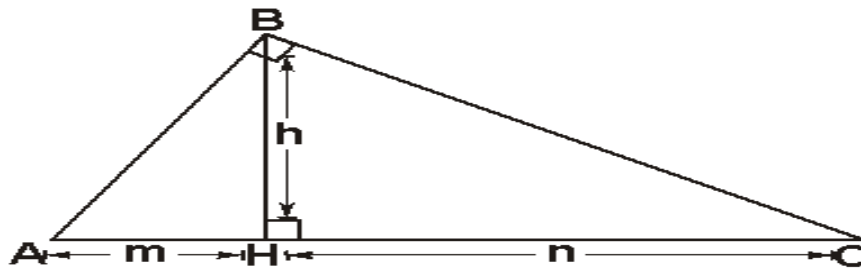


Del gráfico: **$AH = m$** y **$HC = n$**

Se cumple: **$c^2 = m \cdot b$** ; **$a^2 = n \cdot b$**

III) TEOREMA DE LA ALTURA :

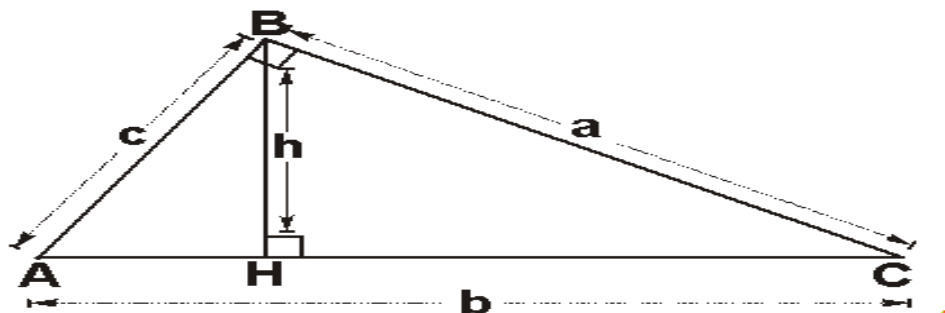
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de su altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



Del gráfico: si, **$BH = h$**

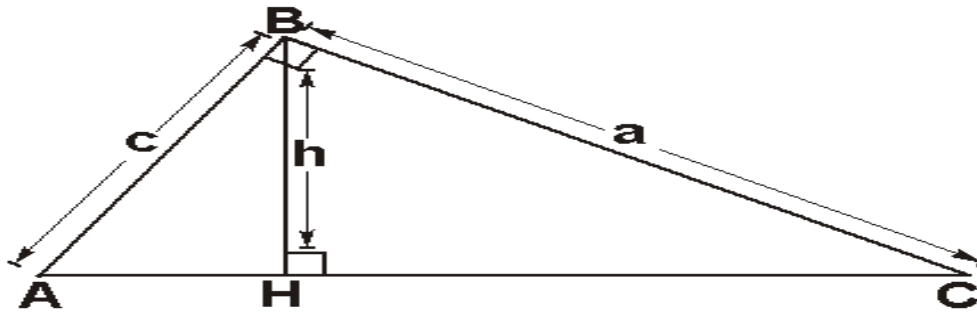
Se cumple: **$h^2 = m \cdot n$**

IV) En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa.



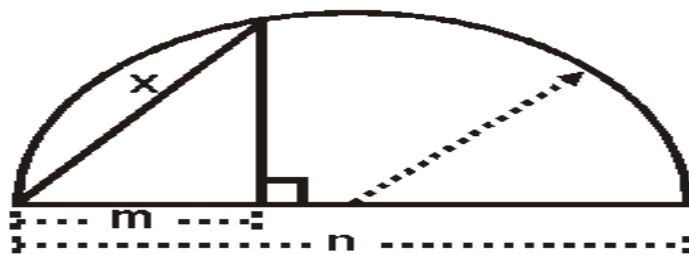
Del gráfico se cumple: **$a \cdot c = b \cdot h$**

IV) En todo triángulo rectángulo la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

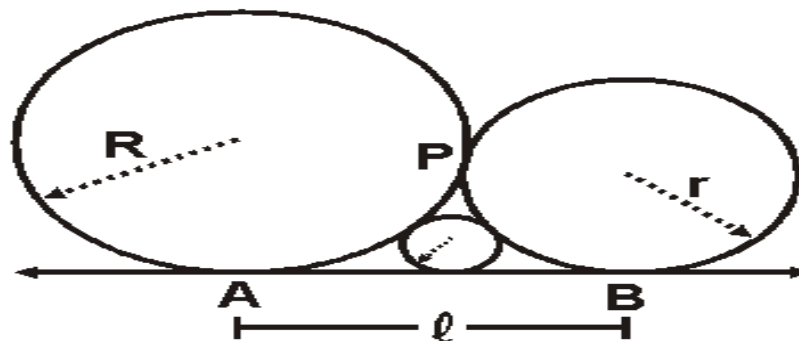


Del gráfico se cumple: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$

OBSERVACIONES :



$$x^2 = mn$$

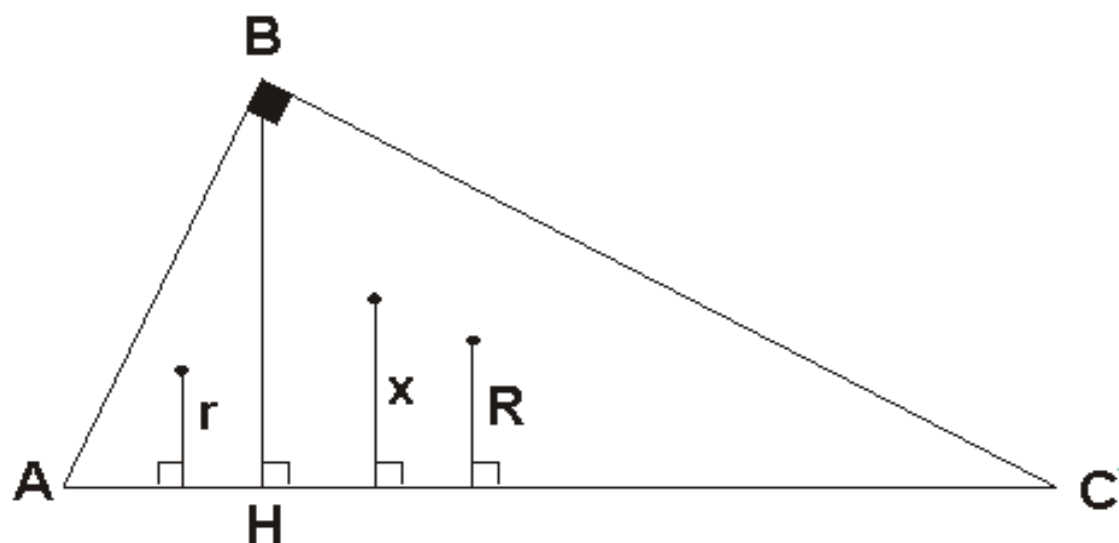


En el gráfico , $\overline{AB}$: segmento tangente común exterior a las circunferencias tangentes exteriores.

Se cumple : $\ell = 2\sqrt{Rr}$

Además , si x es el radio de la circunferencia tangente a las dos circunferencias y a la recta $\overline{AB}$.

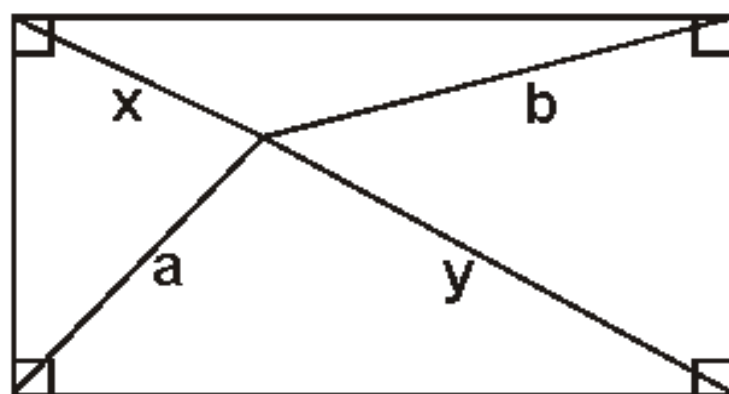
Se cumple : $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$



"r", "R" y "x" inradios de los triángulos AHB, BHC y ABC respectivamente.

$$x^2 = r^2 + R^2$$

EN CUADRADOS O RECTÁNGULOS :

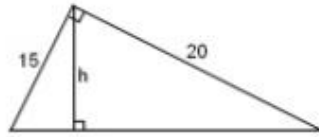


$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

PROBLEMAS

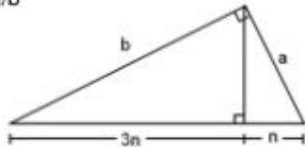
1. Calcular "h" según la figura.

- a) 10
- b) 14
- c) 13
- d) 9
- e) 12



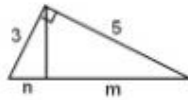
2. Hallar a/b

- a) $1/\sqrt{3}$
- b) $1/\sqrt{2}$
- c) $1/2$
- d) $1/3$
- e) $1/9$



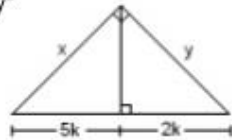
3. Calcular "n/m"

- a) $3/5$
- b) $4/9$
- c) $9/25$
- d) $3/8$
- e) $9/24$



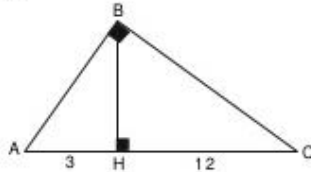
4. Calcular "x/y"

- a) $5/2$
- b) $3/2$
- c) $\sqrt{5}/\sqrt{2}$
- d) $10/3$
- e) $\sqrt{5}/\sqrt{3}$



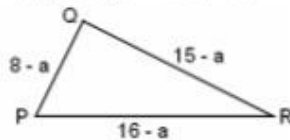
5. Hallar BH.

- a) 4
- b) 6
- c) 15
- d) 5
- e) 9



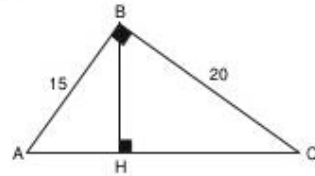
6. Calcular "a", para que: $m\angle Q = 90^\circ$

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 3
- e) 5



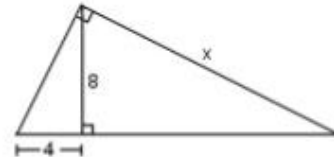
7. Hallar HB.

- a) 9
- b) 12
- c) 16
- d) 13
- e) 10



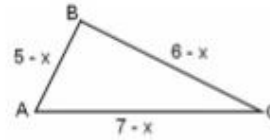
8. Hallar "x"

- a) $8\sqrt{5}$
- b) $6\sqrt{5}$
- c) 10
- d) 12
- e) 15



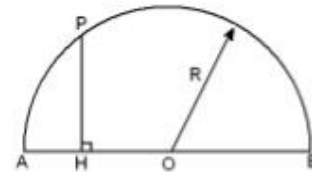
9. Hallar "x", para que: $m\angle B = 90^\circ$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 1,5



10. Si: "O" es centro, $R = 5$; $AH = 3$. Calcular PH

- a) $2\sqrt{5}$
- b) $3\sqrt{5}$
- c) $\sqrt{23}$
- d) $2\sqrt{6}$
- e) $\sqrt{21}$



11. Si: "O" es centro; "P", "Q" y "T" son puntos de tangencia. Además: $AP = 16$; $BT = 9$. Hallar "R".

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 9
- e) 12

